

9) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^t e^{y^2} dy \right) dt$$

ΛΥΣΗ

Θεωρώ $f(t) = \int_1^t e^{y^2} dy$ όπου $f'(t) = e^{t^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t)' f(t) dt &= \left[t \cdot f(t) \right]_0^1 - \int_0^1 t \cdot f'(t) dt = \\ &= \int_1^1 e^{y^2} dy - \int_0^1 t \cdot e^{t^2} dt = - \int_0^1 t \cdot e^{t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (e^{t^2})' dt = -\frac{1}{2} \left[e^{t^2} \right]_0^1 = \frac{1-e}{2} \end{aligned}$$

10) Έστω $F(x) = \int_{2-x}^{x+\frac{1}{2}} \ln t dt$. Να βρείτε:

i. Το π.ο. της F

ii. Τη μονotonia και τα ακρότατα της F

ΛΥΣΗ

i. Θεωρούμε $f(t) = \ln t$, υπο ολοκληρώσιμη συνάρτηση πρέπει $t > 0$ άρα $A_f = (0, +\infty)$

Επομένως, θα πρέπει $2-x \in (0, +\infty)$ και $x+\frac{1}{2} \in (0, +\infty)$
 $2-x > 0$ και $x+\frac{1}{2} > 0$
 $x < 2$ και $x > -\frac{1}{2}$ } $(-\frac{1}{2}, 2)$

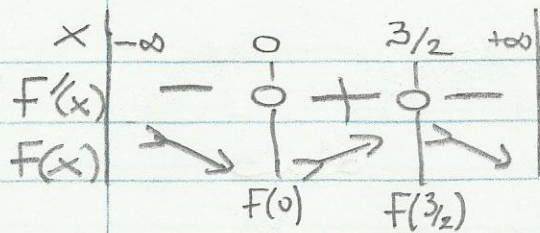
Άρα, $A_F = (-\frac{1}{2}, 2)$

ii. $F(x) = \int_a^{x+\frac{1}{2}} \ln t dt - \int_a^{2-x} \ln t dt$, $a \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = \ln(x+\frac{1}{2}) + \ln(2-x), \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, 2)$$

$$F'(x) = \ln\left[(x+\frac{1}{2}) \cdot (2-x)\right], \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, 2)$$

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\Rightarrow \ln\left[(x+\frac{1}{2}) \cdot (2-x)\right] = \ln 1 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})(2-x) = 1 \\ &\Rightarrow 2x - x^2 + 1 - \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow 4x - 2x^2 - x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x(3-2x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Τοπικό Ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το : $F(0)$

$$\bullet F(0) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln t \, dt = - \int_{\frac{1}{2}}^2 (t)' \ln t \, dt =$$

$$= - [t \cdot \ln t]_{\frac{1}{2}}^2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 t \cdot \frac{1}{t} \, dt = -2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + [t]_{\frac{1}{2}}^2 =$$

$$= -2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \ln 2 + \frac{3}{2}$$

$$\bullet F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{7}{2}}^2 \ln t \, dt = - \int_2^{\frac{7}{2}} \ln t \, dt =$$

$$= - [t \ln t]_2^{\frac{7}{2}} + [t]_2^{\frac{7}{2}} = -\frac{7}{2} \ln \frac{7}{2} + 2 \ln 2 + \frac{7}{2} - 2 =$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{7}{2} \ln \frac{7}{2} + \frac{3}{2}$$